GRUPUL microINFORMATICA
CLUJ-NAPOCA
1999

PROGRAMAREA MATEMATICĂ FOLOSIND MS EXCEL SOLVER, MANAGEMENT SCIENTIST, MATHLAB

Autori : MOISE COCAN
ANCA VASILESCU

Editura Albastră

editura Albastră

Coordonator serie
Smaranda Dervesșteanu

Tehnoredactare computerizată
Codruța Poenaru

Coperta
Liviu Dervesșteanu

Tiraj
500 exemplare

Tipărit
EDITURA ALBASTRĂ
comanda 123 / 99

CUPRINS

INTRODUCERE

Extinderea aplicațiilor informaticii în științele economice, sociale, tehnice etc., ridică o problemă esențială și anume aceea de a răspunde la întrebarea: *în ce măsură aceste aplicații pot fi utile pentru abordarea diferitelor etape ale conducerii, planificării și analizei proceselor economice, sociale, tehnice, sau de altă natură?*

Creşterea continuă a complexității vieții economico-sociale impune necesitatea de a recurge la modelele matematice și la sistemele de calcul, atât pentru fundamentarea deciziilor umane cât și pentru prognozarea consecințelor pe care acestea le pot avea asupra oamenilor.

Concepând **modelul matematic** ca un triplet

{
variabile (parametri) de intrare,
relații funcționale (de legătură),
variabile (parametri) de ieșire
},

în *primul capitol* prezentăm câteva dintre cele mai reprezentative modele de optimizare liniară și neliniară cu multiple posibilități de aplicare în optimizarea comportării sistemelor economice , sociale, tehnice, etc.. Sunt prezentate modele liniare, modele discrete, modele pătratice și modele cu funcție obiectiv fracționară.

În *capitolul al doilea* prezentăm douăzeci și una de probleme economice, sociale și tehnice care se modelează ca probleme de programare matematică liniară, pătratică sau fracționară. Scopul acestui capitol este acela de a motiva tratarea modelelor matematice din capitolul precedent și de a evidenția vastul domeniu de aplicabilitate a acestora.

Demersul întreprins are ca obiectiv central evidențierea modalităților de utilizare a produselor **Solver, The Management Scientist (MS)** și **MatLab** în rezolvarea unor probleme de programare matematică.

În *capitolul al treilea* este prezentată componenta **Solver** din **MS-EXCEL** cu referiri speciale la:

- principalele *ferestre de dialog*;
- condițiile pentru *celula funcției obiectiv*;
- algoritmi și metode utilizate de **Solver**;

- modificarea și ștergerea unor restricții în **Solver**;
- ghid de folosire **Solver** pentru un model dat;
- salvarea unei probleme rezolvate cu **Solver**;
- crearea unui *raport* folosind **Solver**;
- definirea și rezolvarea unei probleme cu **Solver**.

Capitolul al patrulea tratează produsul **The Management Scientist** (prescurtat **MS**). Sunt dezvoltate aspecte privind etapele de lucru cu **MS**, meniurile **Top level menu**, **Problem selection menu**, **Problem disposition menu** și **Problem solution menu**, precum și modul de rezolvare a problemelor de programare liniară și de programare discretă utilizând **MS**.

În *capitolul al cincilea* este prezentat produsul **MatLab** și se insistă asupra posibilităților și limitelor produsului **MatLab**, rezolvării problemelor de programare liniară cu **MatLab** și rezolvării problemelor de programare pătratică utilizând **MatLab**.

Ultimul capitol al lucrării, al șaselea, este consacrat unor semnificative rezultate numerice. Sunt rezolvate douăzeci de probleme de programare matematică, de diverse tipuri, cu ajutorul celor trei produse: **Solver**, **The Management Scientist** și **MatLab**. Este de menționat rezolvarea comparativă a problemelor selectate cu produsele menționate.

1. MODELE DE PROBLEME DE PROGRAMARE MATEMATICĂ

Activitatea modernă în domeniul producției industriale și conducerii activității economico-sociale a devenit atât de complexă, încât rezolvările tradiționale nu mai sunt de mult suficiente. O mare parte dintre problemele care se pun în conducerea activității economico-sociale sunt probleme de optimizare.

Modelarea matematică a acestor probleme oferă posibilitatea determinării soluțiilor optime (din anumite puncte de vedere), cu consecințe imediate asupra creșterii eficienței economice a sectorului respectiv.

Programarea matematică prezintă un deosebit interes, atât din punct de vedere teoretic, cât mai ales din punct de vedere practic. Din acest al doilea punct de vedere, se impune a menționa faptul că probleme dintre cele mai dificile și din cele mai variate domenii sunt rezolvabile cu ajutorul programării matematice.

Problema de programare matematică este o problemă de maximizare sau minimizare a unei funcții (sau a mai multor funcții) de mai multe variabile, numită (numite) funcție (funcții) obiectiv, sau funcție (funcții) scop, sau funcție (funcții) de eficiență, ale cărei (căror) variabile satisfac un sistem de restricții exprimat prin egalități sau inegalități.

Modelul unei probleme de programare matematică este următorul:

$$\begin{aligned} &\max(\min)(z_h = f_h(x_1, x_2, \dots, x_n)), h = 1,\dots,r \\ &g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\rho_i 0, i = 1,\dots,m \\ &\rho_i \in \{\le, =, \ge\}, i = 1,\dots,m. \end{aligned} \qquad (1)$$

În cazul $r>1$ modelul (1) este multidimensional (multiobiectiv). În prezentul volum vom trata numai cazul $r=1$.

1.1. Conceptul de model matematic

Cercetarea operațională – ca știință a adoptării deciziilor eficiente – nu poate fi definită fără a face apel la conceptele de *operație, strategie, model*.

Definim operația ca fiind un ansamblu de acțiuni îndreptate spre realizarea unui anumit scop. Scopul unei operații este, în general, constituit dintr-un ansamblu de obiective.

Mulțimea factorilor (eventual persoanelor) care acționează într-o operație pentru îndeplinirea scopului propus se numește parte operativă, iar resursele pe care le are la dispoziție partea operativă, pentru a-și realiza scopul, se numesc mijloace active.

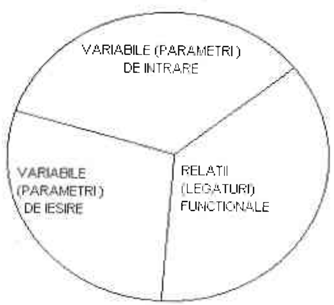
Modul de acțiune a părții operative, adică modul de utilizare a mijloacelor active, se numeşte strategie sau politică.

În studiul oricărei operații se deosebesc patru etape fundamentale:

1. analiza operației, căutarea şi descrierea mijloacelor de acțiune care ar putea duce la atingerea scopului operației;
2. modelarea matematică a operației care să dea o descriere matematică a scopului;
3. estimarea şi compararea eficacității diverselor strategii pe baza modelului construit;
4. studierea strategiilor optime şi a metodelor matematice pentru obținerea acestor strategii.

Modelarea matematică a operațiilor şi în general a proceselor realității înconjurătoare, este însoțită aproape întotdeauna de existența a două tendințe contrare: pe de o parte se caută ca modelul să reflecte cât mai exact procesul real, iar pe de altă parte, se doreşte obținerea unui model cât mai simplu, care să permită rezolvarea completă a problemei. Rezolvarea acestei contradicții este echivalentă cu găsirea echilibrului dintre *„supraaglomerare”* şi *„supra-simplificare”*.

Prin model matematic înțelegem tripletul realizat în figura următoare.



Variabilele (parametrii) de intrare reprezintă variabilele (parametrii) ale căror valori sunt cunoscute (sunt date sau estimate), variabilele (parametrii) de ieşire reprezintă variabilele (parametrii) ce rezultă din prelucrare, iar relațiile funcționale exprimă legăturile (dependențele, relațiile) dintre variabilele de intrare şi variabilele de ieşire, care pot fi ecuații (inecuații) algebrice, ecuații diferențiale, ecuații integrale etc.

Procesul modelării cuprinde următoarele etape:

- cunoaşterea detaliată a realității sistemului (procesului) care se modelează;

- construirea propriu-zisă a modelului matematic;
- experimentarea modelului matematic şi evaluarea soluției;
- implementarea modelului matematic şi implementarea soluției.

Construirea propriu-zisă a modelului constă în una din următoarele două situații:

- alegerea unuia dintre modelele clasice care corespunde problemei formulate, caz în care trebuie să se stabilească corespondența dintre realitate şi ansamblul de modele cunoscute în literatura de specialitate;
- elaborarea unui nou model, acesta putând fi:
  - combinație de modele clasice;
  - model nou propriu-zis.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm câteva dintre cele mai reprezentative modele de optimizare cu restricții (deci de programare matematică), cu multiple posibilități de aplicabilitate în optimizarea sistemelor şi proceselor economice, tehnice, sociale, etc.

1.2. Modele liniare

Modelul (1) în cazul în care funcțiile $f_h(h=1,...r)$ şi $g_i(i=1,...,m)$ sunt liniare, se numeşte ***liniar***.

1.2.1. Modelul general al unei probleme de programare liniară

Modelul general al unei probleme de programare liniară este:

$$
\begin{aligned}
&\min(\max)(\ z = c_1' x_1 + c_2' x_2 + c_3' x_3)\\
&A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1\\
&A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2\\
&A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3\\
&x_1 \geq 0, x_2 - oarecare\ , x_3 \leq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

unde $A_{11} \in \mathrm{M}(p,k)$, $A_{12}(p,l-k)$, $A_{13}(p,n-l)$;

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{pk} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{pl} \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} a_{1,l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{pn} \end{bmatrix};$$

$A_{21} \in \mathrm{M}(q-p,k), A_{22} \in \mathrm{M}(q-p,l-k), A_{23} \in \mathrm{M}(q-p,n-l),$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{p+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p+1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{qk} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{p+1,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p+1,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ql} \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} a_{p+1,l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q,l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{qn} \end{bmatrix};$$

$A_{31} \in \mathrm{M}(m-q,k), A_{32} \in \mathrm{M}(m-q,l-k), A_{33} \in \mathrm{M}(m-q,n-l),$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} a_{q+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{q+1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mk} \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} a_{q+1,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{q+1,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ml} \end{pmatrix},$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{q+1,l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{q+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$b_1 \in \mathrm{M}(p,1), b_2 \in \mathrm{M}(q-p,1), b_3 \in \mathrm{M}(m-q,1);$
$c_1 \in \mathrm{M}(k,1), c_2 \in \mathrm{M}(l-k,1), c_3 \in \mathrm{M}(n-l,1).$

Modelul (1) poate fi scris detaliat astfel:

$$\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1l}x_l + a_{1,l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pk}x_k + a_{p,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{pl}x_l + a_{p,l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{pn}x_n \geq b_p \\
& a_{p+1,1}x_1 + \ldots + a_{p+1,k}x_k + a_{p+1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{p+1,l}x_l + a_{p+1,l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{q1}x_1 + \ldots + a_{qk}x_k + a_{q,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{ql}x_l + a_{q,l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{qn}x_n = b_q \\
& a_{q+1,1}x_1 + \ldots + a_{q+1,k}x_k + a_{q+1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{q+1,l}x_l + a_{q+1,l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{q+1,n}x_n \leq b_{q+1} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mk}x_k + a_{m,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{ml}x_l + a_{m,l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_k \geq 0 \\
& x_{k+1}, \ldots, x_l - \mathit{oarecare} \\
& x_{l+1}, \ldots, x_n \leq 0 \\
& \max(\min)(z = c_1x_1 + \ldots + c_kx_k + c_{k+1}x_{k+1} + \ldots + c_lx_l + c_{l+1}x_{l+1} + \ldots + c_nx_n).
\end{aligned}$$

Modelul dual al modelului (2) este modelul (3):

$$\begin{aligned}
& A_{11}'u_1 + A_{21}'u_2 + A_{31}'u_3 \leq c_1 [\geq c_1] \\
& A_{12}'u_1 + A_{22}'u_2 + A_{32}'u_3 = c_2 \\
& A_{13}'u_1 + A_{23}'u_2 + A_{33}'u_3 \geq c_3 [\leq c_3] \\
& u_1 \geq 0 [\leq 0] \\
& u_2 - \mathit{oarecare} \\
& u_3 \leq 0 [\geq 0] \\
& \max[\min](w = b_1'u_1 + b_2'u_2 + b_3'u_3).
\end{aligned} \tag{3}$$

1.2.2. Modelul standard al unei probleme de programare liniară

În modelul standard toate restricțiile sunt egalități, funcția obiectiv se minimizează sau se maximizează, iar variabilele sunt supuse condițiilor de nenegativitate.

$$\min[\max](z = c'x)$$
$$Ax = b \qquad (4)$$
$$x \geq 0$$
$$A \in \mathrm{M}(m,n),\ c \in \mathrm{M}(n,1),\ b \in \mathrm{M}(m,1).$$

Modelul dual al modelului (4) este:

$$\max[\min](w = b'u)$$
$$A'u \leq c\,[\geq c] \qquad (5)$$
$$u - \textit{oarecare}.$$

1.2.3. Modelul canonic al unei probleme de programare liniară

Modelele (6) și (7) în care funcția obiectiv se minimizează, respectiv se maximizează, restricțiile sunt toate inegalități de același tip ('$\geq$' respectiv '$\leq$'), iar variabilele sunt supuse condițiilor de nenegativitate sunt modele canonice.

$$\min(z = c'x)$$
$$Ax \geq b \qquad (6)$$
$$x \geq 0$$
$$A \in \mathrm{M}(m,n),\ c \in \mathrm{M}(n,1),\ b \in \mathrm{M}(m,1)$$

$$\max(z = c'x)$$
$$Ax \leq b \qquad (7)$$
$$x \geq 0$$
$$A \in \mathrm{M}(m,n), c \in \mathrm{M}(n,1), b \in \mathrm{M}(m,1).$$

Modelele duale modelelor (6) respectiv (7) sunt modelele (8) respectiv (9).

$$\max(w = b'u)$$
$$A'u \leq c \qquad (8)$$
$$u \geq 0$$

$$\min(w = b'u)$$
$$A'u \geq c \qquad (9)$$
$$u \geq 0$$

Observație:

Modelele general, standard și canonic ale unei probleme de programare liniară sunt echivalente, abstracție făcând de următorul set de transformări elementare:

$i.\ \max\limits_{x\in X} f(x) = -\min\limits_{x \in X}\{-f(x)\}$, $\forall X \subseteq R^n$, $\forall f : X \to R$

(în particular pentru $f(x) = c'x = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$, unde $c, x \in X \subseteq R^n$);

$$ii.\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i;$$

$$iii.\ \forall x \in R \Rightarrow x = x_1 - x_2,\ x_1, x_2 \geq 0;$$

$$iv.\ x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0;$$

$$v.\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases};$$

$$vi.\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i, \quad y_i \geq 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

1.3. Modele discrete

Un model de problemă de programare matematică în cazul în care unei submulțimi a mulțimii variabilelor i se impune restricția de integritate devine model discret care are forma (10).

$$\max(\min) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\rho_i\,0,\ i = 1,2,\ldots,m \qquad (10)$$
$$x_k \in S \subseteq Z, k \in N_1 \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$$
$$Z - \textit{mulțimea numerelor întregi}.$$

Dacă $N_1 = \{1,2,...,n\}$ atunci modelul (10) devine model pentru o problemă de programare (totală) în numere întregi. Dacă incluziunea $N_1 \subseteq \{1,2,...,n\}$ este strictă, modelul (10) devine model mixt. În considerațiile noastre toate modelele discrete vor fi liniare.

1.4. Modele bivalente

În cazul $S = \{0,1\}$ și $N_1 = \{1,2,...,n\}$ modelul (10) devine model bivalent (binar). Acesta are forma (11):

$$\begin{aligned}
&max(min) f(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \rho_i 0, i = 1,2,...,m \qquad (11)\\
&x_k \in \{0,1\}, k \in \{1,2,...,n\}.
\end{aligned}$$

1.5. Modele convexe

Modelul unei probleme de programare convexă este:

$$\begin{aligned}
&\min f(x) \\
&a(x) \leq 0 \\
&x \in X, X - convex\breve{a} \qquad (12)\\
&f : X \to R, f - convex\breve{a} \\
&a : X \to R^m, a = (a_1, a_2, ..., a_m)', a_i - convexe (i = 1,2,...,m).
\end{aligned}$$

Un model particular de problemă de programare convexă este acela în care:

$$X = \{x \in R^n / x \geq 0\}. \qquad (13)$$

Condițiile Kuhn-Tucker, deși aparent constituie rezultate de factură pur teoretică, în sensul că nu oferă o metodă practică de determinare a programului optim, acestea constituie baza majorității algoritmilor pentru rezolvarea problemelor de programare convexă.

În acest context menționăm celebra teoremă Kuhn-Tucker, în ipoteza de diferențiabilitate a funcțiilor convexe f și $a_i (i = 1,2,...,m)$:

Condiția necesară și suficientă pentru ca $\hat{x} \in R^n$ să fie o soluție a problemei (12)-(13) este să existe $\hat{u} \in R^m$ astfel ca:

$$\begin{aligned}
&a(\hat{x}) \leq 0 \qquad (14)\\
&\hat{x} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{u} \geq 0 \qquad (15)\\
&\nabla f(\hat{x}) + \nabla a(\hat{x})'\hat{u} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{u}' a(\hat{x}) = 0 \qquad (16)\\
&\hat{x}'[\nabla f(\hat{x}) + \nabla a(\hat{x})'\hat{u}] = 0.
\end{aligned}$$

Dacă în modelul (12) avem $X = R^n$ atunci concluzia din teorema Kuhn-Tucker devine:

$$\begin{aligned}
&a(\hat{x}) \leq 0 \qquad (14')\\
&\hat{x} \in R^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{u} \geq 0 \qquad (15')\\
&\nabla f(\hat{x}) + \nabla a(\hat{x})'\hat{u} = 0
\end{aligned}$$

$$\hat{u}' a(\hat{x}) = 0. \qquad (16')$$

1.6. Modele pătratice

Modelul problemei de programare pătratică în care restricțiile sunt inegalități liniare este prezentat în (17):

$$\begin{aligned}
&\min\{f(x) = p'x + 1/2x'Cx\} \\
&Ax \geq b \\
&x \geq 0 \qquad (17)\\
&A \in M(m,n), b \in M(m,1), p \in M(n,1) \\
&C \in M(n,n), C - simetric\breve{a}.
\end{aligned}$$

Funcția f este convexă (strict convexă) dacă și numai dacă matricea C este pozitiv semidefinită (pozitiv definită). Așadar, în cazul în care matricea C este pozitiv semidefinită, rezultatele din programarea convexă se particularizează imediat pentru modelul (17).

Modelul dual al modelului (17), care rezultă din teorema Kuhn-Tucker [5], este (18), în care se maximizează lagrangeianul asociat problemei (17) cu restricțiile date de condițiile Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned}&\max\{\Phi(x,u)=p'x+1/2x'Cx+u'(b-Ax)\}\\&Ax\ge b, u\ge 0\\&Cx-A'u\ge -p, x\ge 0\\&u'(b-Ax)=0\\&x'(Cx-A'u+p)=0\end{aligned}\qquad (18)$$

Teorema Kuhn-Tucker pentru modelul (17) se exprimă astfel:

Dacă C este pozitiv semidefinită atunci condiția necesară și suficientă pentru ca $\hat{x}\in R^n$ să fie un program optim (soluție) pentru problema (17) este ca să existe $\hat{u}\in R^m$, $\hat{v}\in R^n$, $\hat{y}\in R^m$ astfel ca:

$$\begin{aligned}&A\hat{x}-\hat{y}=b\\&C\hat{x}-A'\hat{u}-\hat{v}=-p\\&\hat{x}\ge 0,\hat{u}\ge 0,\hat{v}\ge 0,\hat{y}\ge 0\\&\hat{x}'\hat{v}=0,\hat{u}'\hat{y}=0.\end{aligned}\qquad (19)$$

Pentru modelul pătratic (20) în care restricțiile sunt exprimate prin egalități liniare:

$$\begin{aligned}&\min\{f(x)=p'x+1/2x'Cx\}\\&Ax=b\\&x\ge 0\end{aligned}\qquad (20)$$

modelul dual este (21):

$$\begin{aligned}&\max\{\Phi(x,u)=p'x+1/2x'Cx+u'(b-Ax)\}\\&Ax=b\\&Cx-A'u\ge -p, x\ge 0\\&x'(Cx-A'u+p)=0.\end{aligned}\qquad (21)$$

Condițiile Kuhn-Tucker, necesare și suficiente pentru optimalitatea unui vector $\hat{x}\in R^n$ pentru problema (20) sunt:

$$\begin{aligned}&A\hat{x}=b\\&C\hat{x}-\hat{v}+A'\hat{u}=-p\\&\hat{x}\ge 0,\ \hat{v}\ge 0\\&\hat{v}'\hat{x}=0.\end{aligned}\qquad (22)$$

În cazul unei probleme de minimizare a unei funcții pătratice strict convexe cu restricții inegalități liniare (pentru care este posibilă rezolvarea cu ajutorul unei metode specific combinatorie reprezentată de algoritmul lui Theil și Van de Panne), modelul este următorul:

$$\begin{aligned}&\min\{f(x)=p'x+1/2x'Cx\}\\&Ax\le b\\&A\in M(m,n), b\in M(m,1)\\&C\in M(n,n), C-\textit{pozitiv definită}.\end{aligned}\qquad (23)$$

Dacă restricțiile sunt egalități liniare modelul este:

$$\begin{aligned}&\min\{f(x)=p'x+1/2x'Cx\}\\&Ax=b\\&A\in M(m,n), b\in M(m,1)\\&C\in M(n,n), C-\textit{pozitiv definită}.\end{aligned}\qquad (24)$$

caz în care condițiile Kuhn-Tucker de optimalitate sunt:

$$\begin{aligned}&Ax=b\\&Cx+A'u=-p\end{aligned}\qquad (25)$$

iar modelul dual este:

$$\begin{aligned}&\max\{b'u-1/2x'Cx\}\\&Ax=b\\&Cx+A'u=-p.\end{aligned}\qquad (26)$$

1.7. Modele de transport

Problemele de transport s-au impus datorită multiplelor posibilități de aplicabilitate pe care le oferă în diverse sectoare ale activității economice. Menționăm numai câteva dintre acestea: